

受験数学基礎力チェック

名前 _____

1. $\frac{3}{x^3+1} + \frac{x-2}{x^2-x+1}$ を簡単にせよ。

考え方 通分するために分子・分母の各式を因数分解するところから始める。

○ 解答

$$\begin{aligned}\frac{3}{x^3+1} + \frac{x-2}{x^2-x+1} &= \frac{3}{(x+1)(x^2-x+1)} + \frac{x-2}{x^2-x+1} \\ &= \frac{3}{(x+1)(x^2-x+1)} + \frac{(x-2)(x+1)}{(x^2-x+1)(x+1)} \\ &= \frac{3+(x-2)(x+1)}{(x+1)(x^2-x+1)} = \frac{x^2-x+1}{(x^2-x+1)(x+1)} = \frac{1}{x+1}\end{aligned}$$

2. K, I, D, S, D, O, O, R の 8 文字を並べ変えてできる文字列は何通り作ることができるか。ただし、K, I, S, R はこの順に並べるものとする。

考え方 「K, I, S, R はこの順に並べるものとする」という追加の指定がなければ基本的な「同種のものを含む順列」である。K, I, S, R の部分は、一度○に置きなおして、並べ終わったら左から K, I, S, R を入れると考える。

○ 解答

並べる文字列には、D, D, O, O と同種の文字が 2 組含まれる。また、並ぶ順番が指定される K, I, S, R は一度○に置きなおして、並べ終わったところで左から順に K, I, S, R を入れると考える。すると、D, D, O, O, ○, ○, ○, ○ を一列に並べる場合を数えれば良いので、求める場合の数は、

$$\frac{8!}{2! \cdot 2! \cdot 4!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{2 \cdot 2} = 420$$

よって 420 通り

3. 方程式 $x^{\log_3 x} = 729x$ を満たす x を求めよ。

考え方 正直、珍しいタイプの問題。729 = 3⁶ はすぐに計算してみるとして、両辺の 3 を底とする対数を取ってみる。

○ 解答

両辺の 3 を底とする対数をとる。

$$\log_3 x^{\log_3 x} = \log_3 729x$$

$$\log_3 x \times \log_3 x = \log_3 729 + \log_3 x$$

$\log_3 x = X$ とおく。 $\log_3 729 = \log_3 3^6 = 6$ であるから、

$$X^2 = 6 + X$$

$$X^2 - X - 6 = 0$$

$$(X - 3)(X + 2) = 0$$

であるから、 $X = 3$, $X = -2$

X を戻して

$$\log_3 x = 3, \text{ より } x = 3^3 = \underline{27}$$

$$\log_3 x = -2, \text{ より } x = 3^{-2} = \underline{\frac{1}{9}}$$

4. $a_1 = 1$, $a_{n+1} = 2a_n - 3$ で定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項をもとめよ。

考え方 等比型の漸化式の特に重要な基本問題。隣接二項間の漸化式の多くはこの形を通過するため、スラスラ確実に解けるようにしておきたい。なお、「等比数列」に持ち込む時の定数 α は特性方程式から求めるほうが悩まなくていい。

○ 解答

特性方程式は $\alpha = 2\alpha - 3$ これを解いて $\alpha = 3$

よって、 $a_{n+1} = 2a_n - 3$ は $a_{n+1} - 3 = 2(a_n - 3)$ と変形できる。

これは、数列 $a_n - 3$ が、初項 $a_1 - 3$ 公比 2 の等比数列であることを意味する。

初項 $a_1 - 3 = -2$ であるから、 $a_n - 3 = (-2) \cdot 2^{n-1}$

よって、一般項は $\underline{a_n = -2^n + 3}$

5. 曲線 $y = |x^2 + 2x - 3|$ ($x \geq 0$) と x 軸、 y 軸、直線 $x = 3$ で囲まれる面積 S を求めよ。

考え方 $| \text{絶対値} |$ で囲まれた関数は、 $| \text{絶対値} |$ 内の正負で分類する。

○ 解答

$x^2 + 2x - 3 = (x + 3)(x - 1)$ であるから、

i) $x > 1$, $x < -3$ で $x^2 + 2x - 3 > 0$ よって、 $|x^2 + 2x - 3| = x^2 + 2x - 3$

ii) $-3 \leq x \leq 1$ で $x^2 + 2x - 3 \leq 0$ よって、 $|x^2 + 2x - 3| = -x^2 - 2x + 3$

$$\begin{aligned} \text{よって} \quad S &= \int_0^1 (-x^2 - 2x + 3)dx + \int_1^3 (x^2 + 2x - 3)dx \\ &= \left[-\frac{1}{3}x^3 - x^2 + 3x \right]_0^1 + \left[\frac{1}{3}x^3 + x^2 - 3x \right]_1^3 \\ &= \left(-\frac{1}{3} - 1 + 3 \right) - 0 + \left(\frac{1}{3} \cdot 27 + 9 - 9 \right) - \left(\frac{1}{3} + 1 - 3 \right) \\ &= 13 - \frac{2}{3} = \underline{\underline{\frac{37}{3}}} \end{aligned}$$